

Méthode de Monte Carlo symbolique : application au cas de la fonction de phase

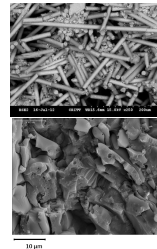
M. ROGER, M. GALTIER, Y. MAANANE, F. ANDRÉ, A. DELMAS

Journée d'Etude en Rayonnement Thermique

22-23 novembre 2018

- ① Introduction
- ② Méthodes de Monte-Carlo symbolique (SMC)
- ③ Nouvelle approche symbolique : illustration au cas de la fonction de phase
- ④ Conclusions

- **Contexte** : Identification expérimentale des propriétés radiatives de matériaux à haute-température
 - Monte-Carlo Symbolique (SMC) : outil d'analyse pour l'inversion
-  **Roger M., Galtier M., André F., Delmas A.,** Symbolic Monte Carlo methods : an analysis tool for the experimental identification of radiative properties at high-temperature, *CTRPM 6, 11-13th April 2018, Cascais, Portugal*



- SMC → expression d'une grandeur comme une **fonction** de paramètres
- **Un seul calcul** permet une estimation de la grandeur sur tout l'espace des paramètres
 - Outil d'analyse pour le problème d'identification
- Approche pour exprimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \equiv f(\kappa_\eta, \sigma_\eta)$
-  Galtier M., Roger M., André F., Delmas A., A symbolic approach for the identification of radiative properties, *JQSRT*, 2017, 196,130-141
- Paramètres de la fonction de phase ?

- ① Introduction
- ② Méthodes de Monte-Carlo symbolique (SMC)
- ③ Nouvelle approche symbolique : illustration au cas de la fonction de phase
- ④ Conclusions

Méthodes de Monte-Carlo symbolique (SMC)

- 📄 **Dunn W.**, Inverse Monte Carlo Analysis, *J Comput Physics*, 1981, 41-154-166.
- 📄 **Subramaniam, S., Mengüç P.**, Solution of the inverse radiation problem for inhomogeneous and anisotropically scattering media using a Monte Carlo technique. *Int J Heat Mass Transfer*, 1991, 34 :253-266.

- **Principe** : identique au Monte-Carlo standard.
- On retient **sous forme symboliques des paramètres**, auxquels on n'affecte aucune valeur numérique durant la simulation.
- ⇒ résultat : grandeur radiative **fonction des paramètres symboliques**.

- **Mêmes avantages que Monte-Carlo**
 - adapté aux **configurations complexes** (géométrie réelle 3D, diffusion, etc.)
 - **estimations des écart-types**.

Luminance : cas d'un milieu homogène absorbant et diffusant

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} \beta_{\eta} \exp(-\beta_{\eta} l_1) \left\{ H(\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{D}) I_{\eta}(\mathbf{x}_{\text{lim}}, \mathbf{u}_0) + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}) \left[(1 - \omega) B_{\eta}(T(\mathbf{x}_1)) + \omega \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_0) I_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right] \right\} dl_1$$

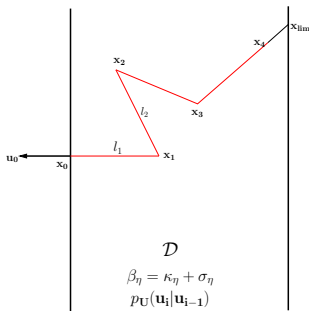


Illustration : algorithme

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} \beta_{\eta} \exp(-\beta_{\eta} l_1) \left\{ H(\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{D}) I_{\eta}(\mathbf{x}_{\text{im}}, \mathbf{u}_0) \right. \\ \left. + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}) \left[(1 - \omega) B_{\eta}(T(\mathbf{x}_1)) + \omega \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_0) I_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right] dl_1 \right\}$$

Algorithme MC pour estimer $I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$

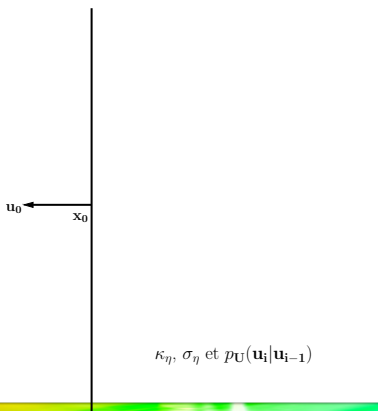


Illustration : algorithme

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} \beta_{\eta} \exp(-\beta_{\eta} l_1) \left\{ H(\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{D}) I_{\eta}(\mathbf{x}_{\text{lim}}, \mathbf{u}_0) + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}) \left[(1 - \omega) B_{\eta}(T(\mathbf{x}_1)) + \omega \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_0) I_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right] dl_1 \right\}$$

Algorithme MC pour estimer $I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$

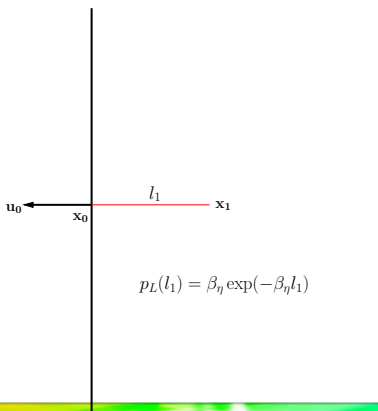


Illustration : algorithme

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} \beta_{\eta} \exp(-\beta_{\eta} l_1) \left\{ H(\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{D}) I_{\eta}(\mathbf{x}_{\text{im}}, \mathbf{u}_0) + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}) \left[(1 - \omega) B_{\eta}(T(\mathbf{x}_1)) + \omega \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_0) I_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right] dl_1 \right\}$$

Algorithme MC pour estimer $I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$

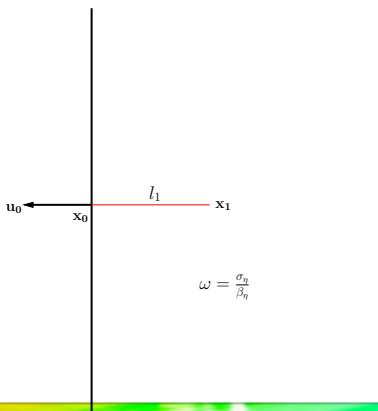


Illustration : algorithme

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} \beta_{\eta} \exp(-\beta_{\eta} l_1) \left\{ H(\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{D}) I_{\eta}(\mathbf{x}_{\text{lim}}, \mathbf{u}_0) + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}) \left[(1 - \omega) B_{\eta}(T(\mathbf{x}_1)) + \omega \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_0) I_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right] dl_1 \right\}$$

Algorithme MC pour estimer $I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$

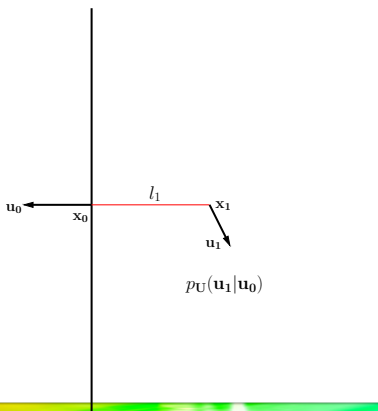


Illustration : algorithme

$$I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} \beta_\eta \exp(-\beta_\eta l_1) \left\{ H(\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{D}) I_\eta(\mathbf{x}_{\text{im}}, \mathbf{u}_0) \right. \\ \left. + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}) \left[(1 - \omega) B_\eta(T(\mathbf{x}_1)) + \omega \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_0) I_\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right] dl_1 \right\}$$

Algorithme MC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$

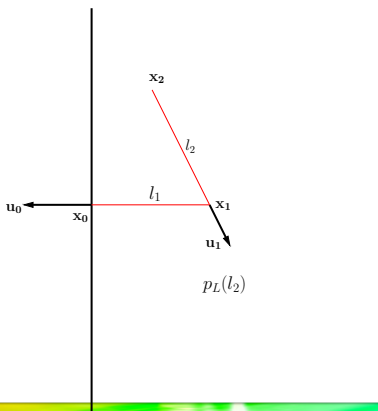


Illustration : algorithme

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} \beta_{\eta} \exp(-\beta_{\eta} l_1) \left\{ H(\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{D}) I_{\eta}(\mathbf{x}_{\text{im}}, \mathbf{u}_0) \right. \\ \left. + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{D}) \left[(1 - \omega) B_{\eta}(T(\mathbf{x}_1)) + \omega \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_0) I_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right] \right\} dl_1$$

Algorithme MC pour estimer $I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$

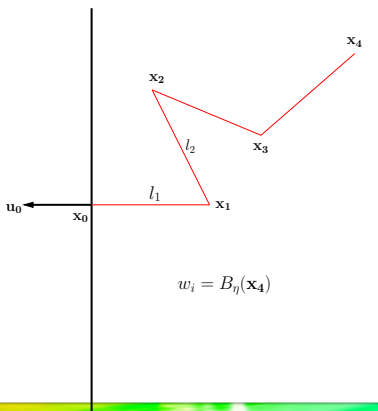


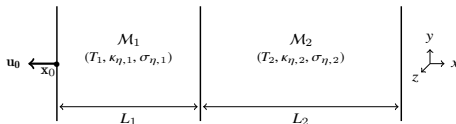
Illustration : algorithme

Algorithme $\forall i \in \{1, N\}$:

- 1 génération aléatoire d'un chemin optique selon p_L, ω, p_U .
- 2 Calcul de la position d'émission $\mathbf{x}_i$ ou de la position de sortie du système $\mathbf{x}_{lim,i}$
- 3 Calcul de $w_i = B_\eta(T(\mathbf{x}_i))$ ou $w_i = I_\eta(\mathbf{x}_{lim,i}, \mathbf{u}_i)$ (CL)

La luminance est estimée par $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i$

Illustration : MC avec 2 milieux différents



Monte-Carlo :

$$w_1 = B_\eta(T_2)$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = B_\eta(T_1)$$

...

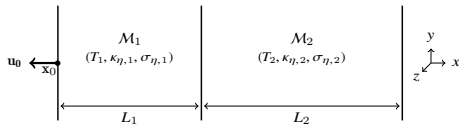
$$w_N = B_\eta(T_2)$$

$$I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i$$

$$\approx \overline{w}$$

Valeur numérique

Illustration : SMC avec T_1 et T_2 inconnues



Monte-Carlo :

$$\begin{aligned} w_1 &= B_\eta(T_2) \\ w_2 &= 0 \\ w_3 &= B_\eta(T_1) \\ &\dots \\ w_N &= B_\eta(T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \\ &\approx \bar{w} \end{aligned}$$

Valeur numérique

Monte-Carlo symbolique :

$$\begin{aligned} w_1(T_1, T_2) &= 0 \times B_\eta(T_1) + 1 \times B_\eta(T_2) \\ w_2(T_1, T_2) &= 0 \times B_\eta(T_1) + 0 \times B_\eta(T_2) \\ w_3(T_1, T_2) &= 1 \times B_\eta(T_1) + 0 \times B_\eta(T_2) \\ &\dots \\ w_N(T_1, T_2) &= 0 \times B_\eta(T_1) + 1 \times B_\eta(T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; T_1, T_2) &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [a_i B_\eta(T_1) + b_i B_\eta(T_2)] \\ &\approx \bar{a} B_\eta(T_1) + \bar{b} B_\eta(T_2) \end{aligned}$$

Fonction

Illustration : Luminance en fonction de températures (identif.)

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; T_1, T_2) \approx \overline{a_j} B_{\eta}(T_1) + \overline{b_j} B_{\eta}(T_2)$$

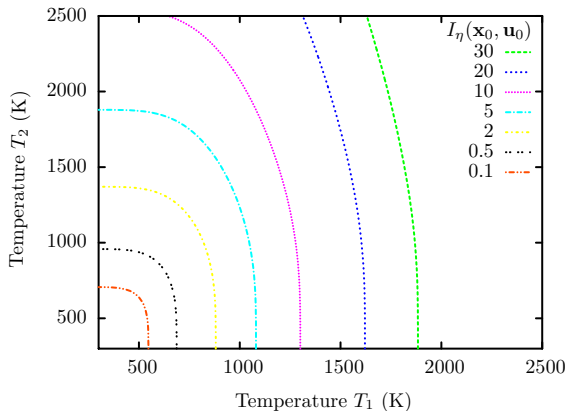
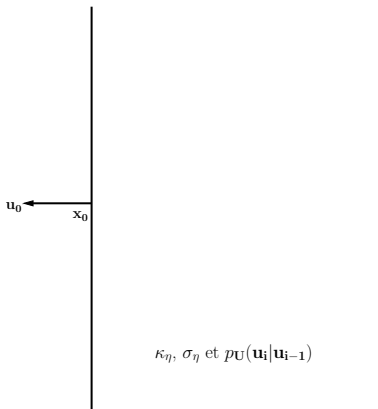


FIGURE – Luminance en fonction des températures T_1 et T_2 . Les épaisseur optiques de diffusion et d'absorption sont fixées à $\tau_{s,\eta} = 1$ et $\tau_{a,\eta} = 1$ pour les deux colonnes et la diffusion est considérée isotrope.

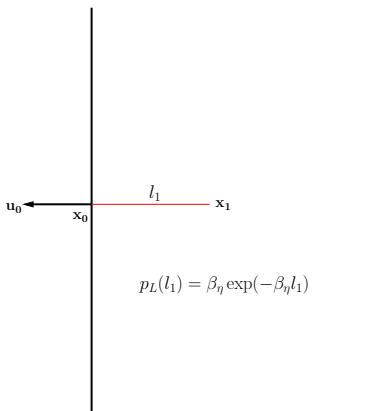
SMC avec fonction de phase inconnue

Algorithme SMC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$



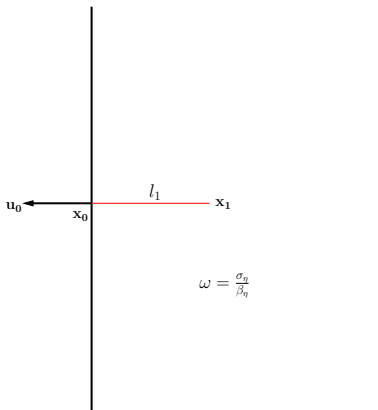
SMC avec fonction de phase inconnue

Algorithme SMC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$



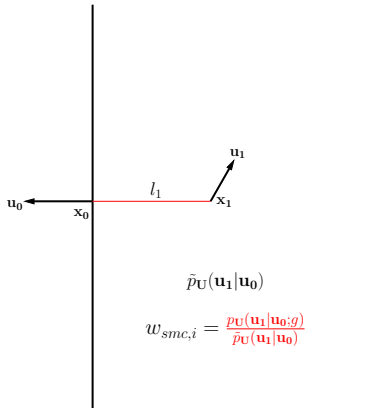
SMC avec fonction de phase inconnue

Algorithme SMC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$



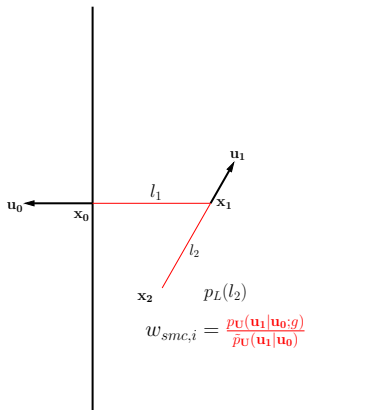
SMC avec fonction de phase inconnue

Algorithme SMC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$



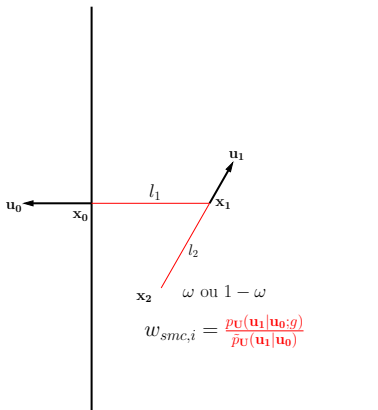
SMC avec fonction de phase inconnue

Algorithme SMC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$



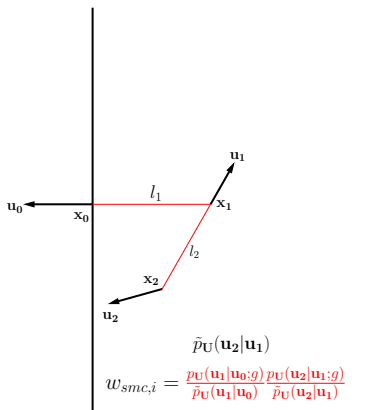
SMC avec fonction de phase inconnue

Algorithme SMC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$

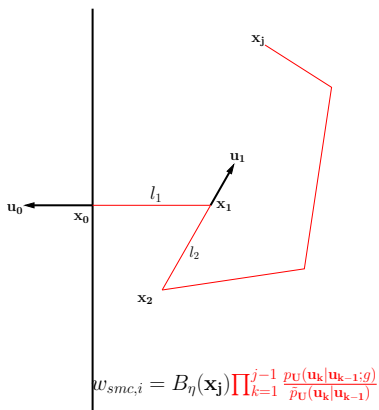


SMC avec fonction de phase inconnue

Algorithme SMC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$



Algorithme SMC pour estimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$



Fonction de phase linéaire anisotrope

$$I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{smc,i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \prod_{k=1}^{d_i} \frac{p_U(\mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k-1}; g)}{\tilde{p}_U}$$

- Fonction de phase linéaire anisotrope : $P_U(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0) = \frac{1+3g \cos \theta_1}{4\pi}$

$$\begin{aligned} \text{si } \tilde{p}_U = \frac{1}{4\pi} \quad I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \prod_{k=1}^{d_i} (1 + 3g \cos \theta_k) \\ &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{0,i} + a_{1,i}g + a_{2,i}g^2 + \dots \end{aligned}$$

- Polynome : $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) = \sum_{n=0}^{d_{\max}} \bar{a}_n g^n$ où $\bar{a}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{n,i}$

 **Subramaniam, S., Mengüç P.**, Solution of the inverse radiation problem for inhomogeneous and anisotropically scattering media using a Monte Carlo technique. *Int J Heat Mass Transfer*, 1991, 34 :253-266.

Fonction de phase linéaire anisotrope

$$I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{smc,i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \prod_{k=1}^{d_i} \frac{p_U(\mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k-1}; g)}{\tilde{p}_U}$$

- Fonction de phase linéaire anisotrope : $P_U(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0) = \frac{1+3g \cos \theta_1}{4\pi}$

$$\begin{aligned} \text{si } \tilde{p}_U = \frac{1}{4\pi} \quad I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \prod_{k=1}^{d_i} (1 + 3g \cos \theta_k) \\ &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{0,i} + a_{1,i}g + a_{2,i}g^2 + \dots \end{aligned}$$

- Polynome : $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) = \sum_{n=0}^{d_{\max}} \bar{a}_n g^n$ où $\bar{a}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{n,i}$

 **Subramaniam, S., Mengüç P.**, Solution of the inverse radiation problem for inhomogeneous and anisotropically scattering media using a Monte Carlo technique. *Int J Heat Mass Transfer*, 1991, 34 :253-266.

Fonction de phase linéaire anisotrope

$$I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \mathbf{g}) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{smc,i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \prod_{k=1}^{d_i} \frac{p_U(\mathbf{u}_k | \mathbf{u}_{k-1}; \mathbf{g})}{\tilde{p}_U}$$

- Fonction de phase linéaire anisotrope : $P_U(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0) = \frac{1+3g \cos \theta_1}{4\pi}$

$$\begin{aligned} \text{si } \tilde{p}_U = \frac{1}{4\pi} \quad I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \mathbf{g}) &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \prod_{k=1}^{d_i} (1 + 3g \cos \theta_k) \\ &\simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{0,i} + a_{1,i}g + a_{2,i}g^2 + \dots \end{aligned}$$

- Polynome :** $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \mathbf{g}) = \sum_{n=0}^{d_{\max}} \bar{a}_n g^n$ où $\bar{a}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{n,i}$

 **Subramaniam, S., Mengüç P.**, Solution of the inverse radiation problem for inhomogeneous and anisotropically scattering media using a Monte Carlo technique. *Int J Heat Mass Transfer*, 1991, 34 :253-266.

Fonction de phase linéaire anisotrope

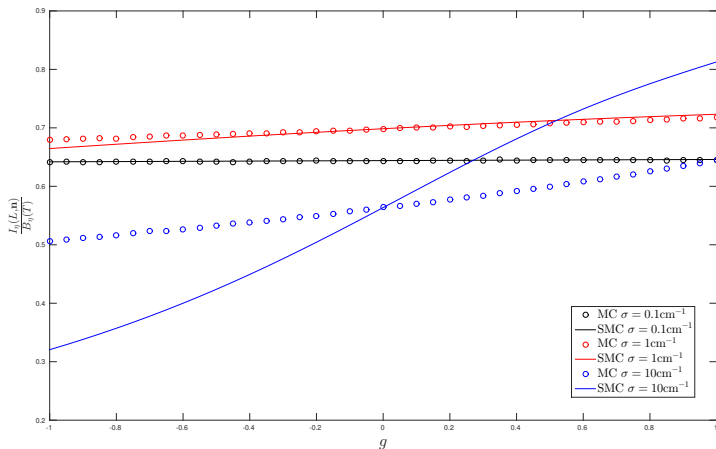


FIGURE – $I_\eta(g)$ dans une couche d'épaisseur $L = 1 \text{ cm}$, $\kappa_\eta = 1 \text{ cm}^{-1}$

Fonction de phase Henyey-Greenstein

Fonction de phase Henyey-Greenstein :

$$P_U(\cos \theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{\frac{2}{3}}}$$

- Impossibilité d'appliquer SMC classique :

$$I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \prod_{k=1}^{d_i} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta_k)^{\frac{2}{3}}}$$

ne peut pas être simplifiée

- Proposition d'une approche symbolique différente

- ① Introduction
- ② Méthodes de Monte-Carlo symbolique (SMC)
- ③ Nouvelle approche symbolique : illustration au cas de la fonction de phase
- ④ Conclusions

Projection sur une base de polynômes orthogonaux

- On impose l'expression polynomiale de la luminance :

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) = \sum_{n=0}^d a_n P_n(g)$$

où P_n sont des polynômes orthogonaux et d est fixé

- Cas des polynômes de Legendre :

$$\langle P_n P_m \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(g) P_m(g) dg = \frac{\delta_{nm}}{2n+1}$$

- a_n est déduit de $\langle I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) P_n(g) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) P_n(g) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^d a_m P_m(g) P_n(g) dg \\ &= \sum_{m=0}^d a_m \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_m(g) P_n(g) dg \right] = \frac{a_n}{2n+1} \end{aligned}$$

Projection sur une base de polynômes orthogonaux

- On impose l'expression polynomiale de la luminance :

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) = \sum_{n=0}^d a_n P_n(g)$$

où P_n sont des polynômes orthogonaux et d est fixé

- Cas des polynômes de **Legendre** :

$$\langle P_n P_m \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(g) P_m(g) dg = \frac{\delta_{nm}}{2n+1}$$

- a_n est déduit de $\langle I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) P_n(g) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) P_n(g) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^d a_m P_m(g) P_n(g) dg \\ &= \sum_{m=0}^d a_m \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_m(g) P_n(g) dg \right] = \frac{a_n}{2n+1} \end{aligned}$$

Projection sur une base de polynômes orthogonaux

- On impose l'expression polynomiale de la luminance :

$$I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) = \sum_{n=0}^d a_n P_n(g)$$

où P_n sont des polynômes orthogonaux et d est fixé

- Cas des polynômes de **Legendre** :

$$\langle P_n P_m \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n(g) P_m(g) dg = \frac{\delta_{nm}}{2n+1}$$

- a_n est déduit de $\langle I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) P_n(g) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle I_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) P_n(g) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^d a_m P_m(g) P_n(g) dg \\ &= \sum_{m=0}^d a_m \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_m(g) P_n(g) dg \right] = \frac{a_n}{2n+1} \end{aligned}$$

- a_n s'exprime donc par :

$$\begin{aligned}
 a_n &= (2n+1) \langle I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) P_n(g) \rangle \\
 &= (2n+1) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \tilde{g}) P_n(\tilde{g}) d\tilde{g}
 \end{aligned}$$

- On introduit a_n dans $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$:

$$\begin{aligned}
 I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) &= \sum_{n=0}^d \left[(2n+1) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \tilde{g}) P_n(\tilde{g}) d\tilde{g} \right] P_n(g) \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \tilde{g}) \sum_{n=0}^d \left[(2n+1) P_n(\tilde{g}) d\tilde{g} \right] P_n(g)
 \end{aligned}$$

- a_n s'exprime donc par :

$$\begin{aligned}
 a_n &= (2n+1) \langle I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) P_n(g) \rangle \\
 &= (2n+1) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \tilde{g}) P_n(\tilde{g}) d\tilde{g}
 \end{aligned}$$

- On introduit a_n dans $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$:

$$\begin{aligned}
 I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) &= \sum_{n=0}^d \left[(2n+1) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \tilde{g}) P_n(\tilde{g}) d\tilde{g} \right] P_n(g) \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \tilde{g}) \sum_{n=0}^d \left[(2n+1) P_n(\tilde{g}) d\tilde{g} \right] P_n(g)
 \end{aligned}$$

$$I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; \tilde{g}) \sum_{n=0}^d (2n+1) P_n(\tilde{g}) d\tilde{g} P_n(g)$$

- $\forall i = \{1, N\}$
 - ① génération aléatoire de $\tilde{g}_i$ sur $[-1; 1]$ selon $p_{\tilde{G}} = \frac{1}{2}$
 - ② Calcul du poids w_i par un algorithme de Monte-Carlo classique avec $\tilde{g}_i$
 - ① génération aléatoire d'un chemin optique selon p_L, ω, p_U .
 - ② Calcul de la position d'émission $\mathbf{x}_i$ ou de la position de sortie du système $\mathbf{x}_{lim,i}$
 - ③ Calcul de $w_i = B_\eta(T(\mathbf{x}_i))$ ou $w_i = I_\eta(\mathbf{x}_{lim,i}, \mathbf{u}_i)$ (CL)
 - ③ $\forall n \in \{0, d\}$, calcul des $a_{n,i} = w_i(2n+1)P_n(\tilde{g}_i)$
- Estimation des coefficients :

$$\forall n \in \{0, d\} \quad a_n \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{n,i}$$

Fonction de phase linéaire anisotrope

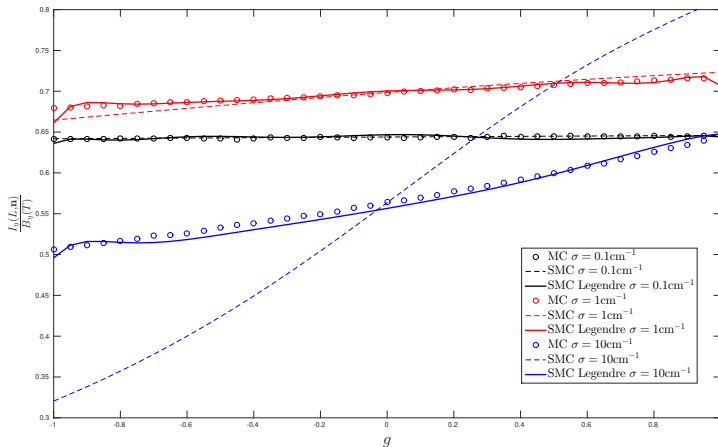


FIGURE – $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$ dans une couche d'épaisseur $L = 1\text{cm}$, $\kappa_\eta = 1\text{cm}^{-1}$. Degré du polynôme fixé à $d = 10$.

Fonction de phase d'Henyey-Greenstein

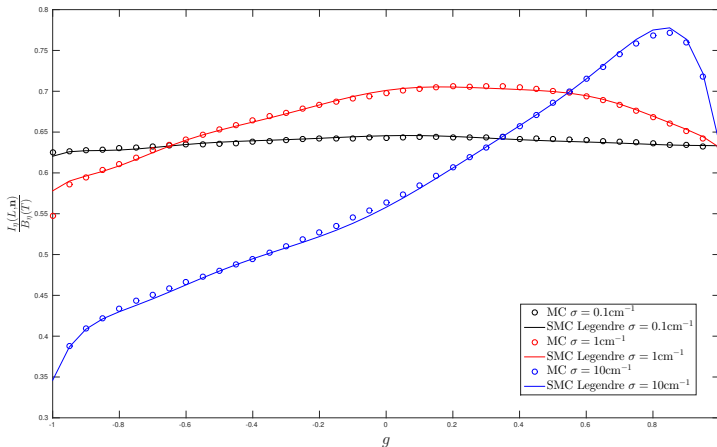


FIGURE – $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$ dans une couche d'épaisseur $L = 1 \text{ cm}$, $\kappa_\eta = 1 \text{ cm}^{-1}$. Degré du polynôme fixé à $d = 10$.

- ① Introduction
- ② Méthodes de Monte-Carlo symbolique (SMC)
- ③ Nouvelle approche symbolique : illustration au cas de la fonction de phase
- ④ Conclusions

- Proposition d'une nouvelle approche pour exprimer $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ en fonction de g .
- Inconvénient : fonction polynomiale imposée (biais sur le modèle ETR)
- Avantages :
 - Mise en oeuvre possible pour tout type de paramètres.
 - Complémentaire de l'approche symbolique classique (SMC avec κ_η , σ_η et g sous forme symbolique)
 - Mise en oeuvre possible avec une autre méthode (FEM, DOM)
- Perspectives :
 - Tests avec d'autres paramètres et d'autres types de polynomes

Merci de votre attention

Influence du degré d du polynome

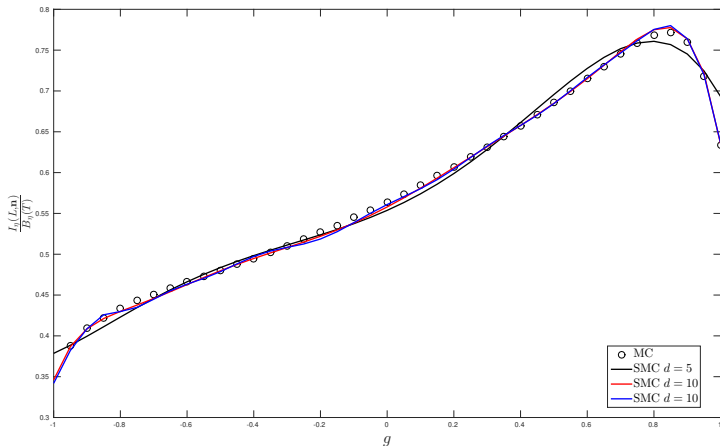


FIGURE – $I_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0; g)$ dans une couche d'épaisseur $L = 1\text{cm}$, $\kappa_\eta = 1\text{cm}^{-1}$ et $\sigma_\eta = 10\text{cm}^{-1}$.

Influence du degré d du polynome

Identification de T_1 et T_2 à partir de trois mesures à des η différents :

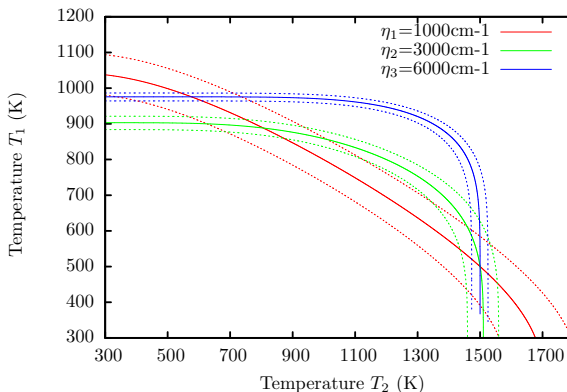


FIGURE – Luminance en fonction des températures T_1 et T_2 du milieu pour 3 valeurs de η . Des calculs directs simulent les résultats expérimentaux avec $T_1 = 500 \text{ K}$ et $T_2 = 1500 \text{ K}$. Les épaisseurs optiques de diffusion et d'absorption sont fixées à $\tau_{s,\eta} = 1$ et $\tau_{a,\eta} = 1$ pour les deux colonnes et la diffusion est considérée isotrope.